

УДК 622.236.3

О.В. Горобчишин  
ДГЦУ

## Регулювання напружено-деформованого стану на уступах блочного каменю в процесі його видобування

В статье рассмотрен способ решения плоской задачи механики деформирования твердого тела с использованием пакета «Mathcad», который использовался для оценки зональной технологической трещиноватости на гранитных карьерах в процессе их отделения от массива. В пакете «Mathcad» уже существуют разработанные программные блоки для решения плоской задачи механики деформируемого твердого тела, которые позволяют избежать необходимости решения задачи путем транспонирования матриц и нахождения корней системы алгебраических уравнений. Анализ представленных результатов обнаруживает в окрестности угла уступа область концентрации высоких напряжений, которая представляет опасную зону. По мере углубления в массив эта концентрация быстро снижается. Особо следует отметить появление зон напряжений растяжения, которые наиболее опасны для гранитоидов. Для моделирования этого процесса предлагается объединить классический математический аппарат механики разрушения сплошной среды с критерием разрушения Нейбера для угловых зон на уступе карьера, что позволит с высокой точностью описать формирования напряженных угловых зон.

In the article the way to solve the problem of plane deformation mechanics of solids using Mathcad package for evaluation zonal fracturing technology in granite quarries in the process of separation from the array. In the package Mathcad existing the program blocks are designed to solve plane problem deformuyemoho mechanics of solids, which avoid the need to address the problem by transposition of matrices and finding a root system of algebraic equations. Analysis of the results reveals around a corner ledge area of high stress concentration which represents danger zone. With the deepening of the array this concentration decreases rapidly. Of particular note is the appearance of zones of tensions that are most dangerous to granitoids. To simulate this process is proposed to combine the classic mathematical apparatus with fracture mechanics criterion for angular Neybera fracture zones on the ledge of a career that will accurately describe the formation of intense angular zones.

Об'єднуючим для всіх гірських порід є той факт, що гірські породи не можна ідеалізувати, як це робиться в механіці або фізиці твердого тіла, оскільки з самого початку в них присутній набір дефектів, що визначають їх конкретні властивості і подальшу поведінку. Фізична неоднорідність і анізотропія властивостей гірських порід значно ускладнює або робить неможливим отримання рішень в аналітичному вигляді. Тому особливої актуальності набуває математичне моделювання процесу розподілу напружено-деформованого стану в

гранітних блоках у процесі їх видобування з застосуванням прикладних комп'ютерних програм. Використання методів кінцевих елементів для вирішення завдань гірничої геомеханіки дозволило створити зручну в практичному сенсі методику для вирішення складних диференціальних рівнянь механіки деформування твердого тіла [1, 2]. Для інженерних розрахунків досить просто реалізувати розроблений алгоритм метода кінцевих елементів для розрахунку напружено-деформованого стану гранітного уступу в процесі видо-

бування блоків, який включає процедуру вирішення крайового завдання теорії пружності в постановці плоскої деформації з використанням пакету Mathcad.

Суть методу кінцевих елементів полягає в тому, що суцільне тіло з об'ємом  $V$  і площею зовнішньої поверхні  $S$  розбивають на трикутникові елементи (рис. 1). На тіло діють поверхневі сили  $P$  і об'ємні сили  $Q$ . У результаті відбувається заміна суцільного реального тіла на кінцеві елементи.

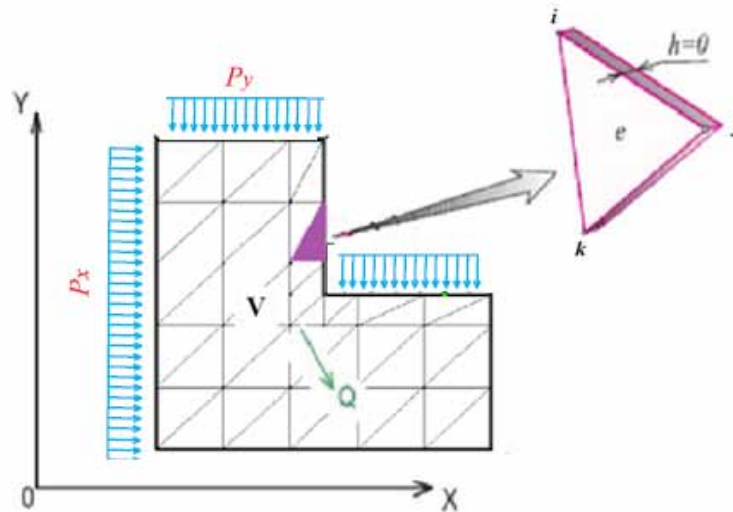


Рисунок 1. Розрахункова схема в кінцево-елементному представленні

Для правильного відображення поля переміщень та поля напружень приймаються, що для кожного з вузлів елемента виконано рівняння рівноваги і в вузлових точках забезпечена нерозривність деформацій. Рівновага буде повною тільки за умови рівняння віртуальних робіт. Причому сума добутоків переміщень на відповідні компоненти напружень визначає зовнішню роботу, тоді як сума добутоків деформацій на відповідні компоненти напружень – внутрішню роботу. Тоді величина потенційної енергії, накопиченої тілом у разі деформації [3]:

де перший член цього рівняння відповідає варіації енергії деформації тіла, а другий – варіації потенційної енергії зовнішнього навантаження, тоді  $\Pi$  – повна потенційна енергія. Для забезпечення рівняння рівноваги повна потенційна енергія повинна приймати стаціонарне значення.

У методі кінцевих елементів середовище поділяється на серію елементів, які взаємодіють між собою в кінцевій кіль-

$$\dot{I} = U + W$$

кості вузлових точок. Цей процес називається дискретизацією задачі. У задачі аналізу об'єкта кінцеві рівняння МКЕ можуть бути отримані мінімізацією загальної потенційної енергії системи.

Використовуючи матричні позначення, енергію деформації можна виразити рівнянням

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV$$

де  $\{\sigma\}$  – вектор, що містить компоненти напружень або зусиль;

$\{\varepsilon\}$  – вектор, що містить компоненти деформацій.

Потенціал навантажень, який прикладений в об'ємі об'єкту і на його поверхню дорівнює:

$$W = - \int_V \{\delta\}^T \{Q\} dV - \int_S \{\delta\}^T \{P\} dS$$

де  $\{u\}$  – вектор переміщень внутрішніх вузлів елемента;

$\{Q\}$  – вектор сил, розподілених по об'єму матеріалу;

$\{P\}$  – вектор сил, розподілених по поверхні об'єкта.

Для отримання умови рівноваги механічної системи необхідно вирішити задачу у варіаційній постановці за допомогою методу Рітца із застосуванням мінімізації потенційної енергії системи. Це можна представити у вигляді:

$$\dot{I} = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV - \int_V \{\delta\}^T \{Q\} dV - \int_S \{\delta\}^T \{P\} dS$$

$$\text{де } \{\delta\} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \\ v_i \\ v_j \\ v_k \end{bmatrix}$$

– вектор вузлових переміщень, а вектор деформацій визначається з рівняння Коши, і рівняння закону Гука для напружень може теж представлено в матричній формі:

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [B] \{\delta\}, \quad \{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [D] \{\varepsilon\}$$

$[D]$  – матриця зв'язку напружень і деформацій, яка відображає характеристики матеріалу, для випадку плоско-деформованого стану вона має вигляд

$$[D] = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

де  $E$  – модуль Юнга матеріалу,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона.

[B] – матриця похідних функції форми.

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial x} \end{bmatrix}$$

де  $N_i = \frac{1}{2\Delta}(a_i + b_i x + c_i y)$ ;  $a_i = x_j y_k - x_k y_j$ ;

$b_i = y_j - y_k$ ;  $c_i = x_k - x_j$  – вирази для функцій форми  $N_i, N_j, N_k$  можна отримати шляхом підстановки по колу індексів номерів вузлів елемента  $i, j, k$ , а  $x_{i,j,k}, y_{i,j,k}$  – координати цих вузлів.

$$\begin{cases} a_i = x_j y_k - x_k y_j \\ b_i = y_j - y_k \\ c_i = x_k - x_j \end{cases} \begin{cases} a_j = x_k y_i - x_i y_k \\ b_j = y_k - y_i \\ c_j = x_i - x_k \end{cases} \begin{cases} a_k = x_i y_j - x_j y_i \\ b_k = y_i - y_j \\ c_k = x_j - x_i \end{cases}$$

У результаті перетворень матрицю [B] можна записати у вигляді

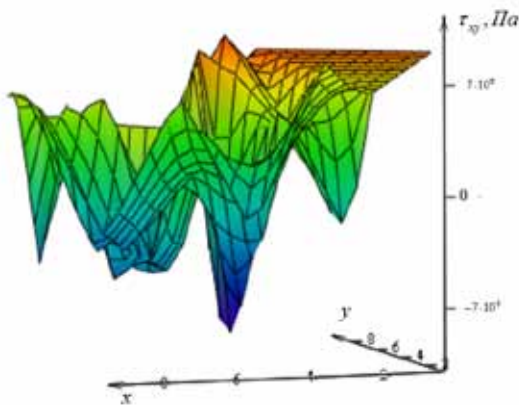
$$[B] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix}$$

Співвідношення між вузловими силами і вузловими переміщеннями записується у вигляді рівняння жорсткості

$$\{F\} = [K]\{\delta\}$$

де [K] – квадратна матриця жорсткості елемента, а {F} і {δ} – відповідно вектори сил і переміщень для елемента. До речі, {F} – вектор еквівалентних вузлових сил, до якого приводяться всі поверхневі {P} і розподілені по об'єму сили {Q}, що діють на цей кінцевий елемент.

Кут уступу 90°



Залежності дотичних напружень  $\tau_{xy}$  за значень кутової зони 90°. Мах значення – 7,24 МПа, мін значення – 7,38 МПа

$$\{P\} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} \text{ – вектор поверхневих сил,}$$

$\{Q\} = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix}$  – вектор об'ємних сил напруги. Тоді матрицю жорсткості кінцевого елемента можна представити у вигляді:

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dV = \Delta [B]^T [D] [B]$$

де Δ – площа елемента.

Коли об'єкт моделюється набором кінцевих елементів, потенційна енергія всього об'єкта буде складатися з потенційних енергій окремих кінцевих елементів. У силу цього глобальна система рівнянь МКЕ може бути отримана шляхом складання по всіх кінцевих елементах.

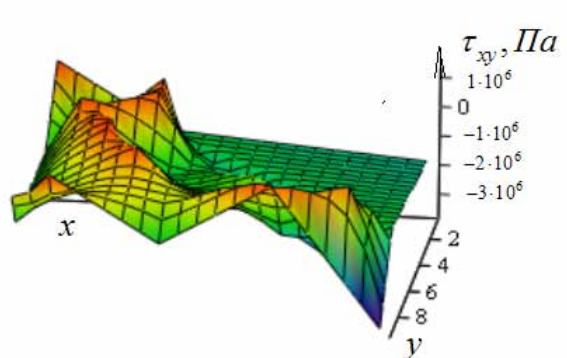
Точність результатів буде визначатися частотою розбиття розрахункової області трикутною сіткою кінцевих елементів.

Для аналізу напружено-деформованого стану на уступах блочного каменю в процесі його видобування використовувався пакет «Mathcad». Як зазначено в роботі [4], вже існують розроблені програмні блоки для вирішення плоскої задачі механіки твердого тіла, що деформується, які дозволяють уникнути необхідності вирішення задачі шляхом транспонування матриць та знаходження коренів системи алгебраїчних рівнянь. У пакеті «Mathcad» для цього передбачені спеціальні функції і інструменти. Використовуючи стандартні прийоми завантаження даних, в пакеті «Mathcad» формують таблиці вихідних даних з інформацією о вузлах елементів і заданих вузлових силах та переміщеннях. Для певного виду гранітоїда формуються матриці [B] і [D], а також формується матриця жорсткості. За вже відомими вузловими переміщеннями розраховуються деформації і напруження для кожного елемента.

Вихідні дані для числового моделювання:

- об'ємна маса (питома вага) граніту – 2700 кг/м<sup>3</sup>;
- міцність на стиснення/згин – 165/18 МПа;
- модуль пружності E – 0,8×10<sup>5</sup> МПа;
- коефіцієнт Пуассона (μ) – 0,25;
- кут внутрішнього тертя (φ) – 37°.

Кут уступу 80°



Залежності дотичних напружень  $\tau_{xy}$  за значень кутової зони 80°. Мах значення – 1,19 МПа, мін значення – 3,69 МПа

Аналіз представлених результатів виявляє в околиці кута уступу область концентрації високих напружень, яка представляє небезпечну зону. По мірі поглиблення в масив ця концентрація швидко знижується. Особливо слід зазначити небезпеку появи напружень розтягнення, які найбільш загрозливі для гранітоїдів. Для моделювання цього процесу ми вирішили об'єднати класичний математичний апарат механіки руйнування суцільного середовища з критерієм руйнування Нейбера для кутових зон на уступі кар'єра, що дозволить з високою точністю описати формування напружених кутових зон.

Міцність непорушеної породи описуються з використанням кіл Мора. Особливістю теорії міцності Мора є те, що вона описує руйнування в результаті як зсуву, так і відриву, причому можна оцінювати можливість руйнування в будь-якій точці породного масиву. На відміну від теорії міцності Мора, застосування критерію Нейбера дозволить ще врахувати структуру матеріалу в вершині кутового вирізу і більш точно описати механізм руйнування тріщинуватих тіл. При цьому використовуються поняття класичної механіки руйнування (механіка деформованого твердого тіла) і фізики твердого тіла, пов'язані зі структурою матеріалу. Критерій Ірвіна-Гріффітса успішно працює для розрахунку тріщин, але призводить до занижених результатів [5, 6] у разі кутових вирізів. Реальна тріщина вже не є розрізом, а являє собою кутовий виріз, тому виникає завдання визначення напружено-деформованого стану навколо прямокутного вирізу.

У результаті проведених досліджень запропоновано математичну модель процесу формування зональної технологічної зональної мікротріщинуватості в процесі виймання блоків. Ця зональна мікротріщинуватість є природним процесом, викликаним розвантаженням і перерозподілом природного напруженого стану масиву внаслідок часткової виїмки блоків. Виключити його повністю неможливо, проте можна його регулювати, наприклад, кутом вирізу блоку на уступі, знижуючи рівень напружень та деформацій у відповідних кутових зонах. Моделювання та оптимізація цього процесу дозволить підвищити вихід і якість облицювальної продукції, що виготовляється з таких блоків.

#### Використана література

1. Кальчук С.В. Особливості формування поля напружень при видобуванні блочного облицювального каменю – Вісник НТУУ «КПІ». Серія «Гірництво». Випуск 26. – 2014 – С. 80–84.
2. Клованич С.Ф. Метод конечных элементов в нелинейных задачах инженерной механики / Запорожье – Издательство журнала «Світ геотехніки». – 2009. – 400 с.
3. Сахаров А.С. Метод конечных элементов в механике твердых тел. – Киев: Вища школа, 1982. – 480 с.
4. Бачурин Л. Л. Решение плоской задачи механики деформируемого твердого тела методом конечных элементов в пакете Mathcad // Exponenta Pro. Математика в приложениях. – 2003. – № 3. – С. 28–36.
5. Зуєвська Н.В. Вплив технології видобування природного каменю на його міцнісні характеристики // Збірник наукових праць «Проблеми гірського тиску» – ДВНЗ «ДонНТУ», 2012. – №1 (20) – 2 (21). – С. 3–9.
6. Мясникова О.В., Шеков В.А. Влияние микротрещиноватости породного массива на физико-механические характеристики каменных изделий // Горный журнал. – 2011. – № 5. – С. 20–22.
7. Корнев В.М. Модификация критерия разрушения Нейбера-Новойловой для угловых вырезов // ПМТФ. 2002. – Т. 43, № 1. – С. 153–159.